ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Е. А. Бакланов

Новосибирск, 2024

Экспоненциальные неравенства

В настоящем параграфе будут получены вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин. Отметим, что ключевым инструментом при выводе экспоненциальных оценок для распределений сумм независимых случайных величин является экспоненциальное неравенство Чебышёва.

Всюду в этом параграфе $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $n \geqslant 1$.

Сначала получим несколько уже ставших классическими неравенств для ограниченных случайных величин.

Лемма 2.1

Пусть $\mathsf{E}X = 0$ *и* $\mathsf{P}(a \leqslant X \leqslant b) = 1$. *Тогда для любого* $\lambda > 0$

$$\mathsf{E}e^{\lambda X} \leqslant e^{\lambda^2 (b-a)^2/8}.$$

Доказательство

Так как при $\lambda > 0$ функция $g(z) = e^{\lambda z}$ выпуклая, то для всех $a \leqslant z \leqslant b$

$$\begin{aligned} e^{\lambda z} &= g(z) \leqslant \frac{b-z}{b-a}\, g(a) + \left(1 - \frac{b-z}{b-a}\right) g(b) = \\ &= \frac{b-z}{b-a}\, e^{\lambda a} + \frac{z-a}{b-a}\, e^{\lambda b}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$e^{\lambda X} \leqslant \frac{b-X}{b-a}\, e^{\lambda a} + \frac{X-a}{b-a}\, e^{\lambda b}.$$

Доказательство

Так как $\mathsf{E}X = 0$, то, взяв математическое ожидание обеих частей этого неравенства, получим:

$$\mathsf{E}e^{\lambda X} \leqslant \frac{b}{b-a}\, e^{\lambda a} - \frac{a}{b-a}\, e^{\lambda b} = e^{\lambda a}\Big(1 + \frac{a}{b-a} - \frac{a}{b-a}\, e^{\lambda(b-a)}\Big).$$

Обозначим $\gamma = -a/(b-a)$, $u = \lambda(b-a)$. Тогда получим:

$$\mathsf{E}e^{\lambda X} \leqslant e^{-\gamma u}(1 - \gamma + \gamma\, e^{u}).$$

Доказательство

Рассмотрим функцию $\varphi(u) = -\gamma u + \ln(1 - \gamma + \gamma e^u)$, $u \geqslant 0$. Тогда, как нетрудно заметить, $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ и

$$\varphi''(u) = \frac{\gamma(1-\gamma)e^u}{(1-\gamma+\gamma e^u)^2} = \frac{\gamma e^u}{1-\gamma+\gamma e^u}\left(1 - \frac{\gamma e^u}{1-\gamma+\gamma e^u}\right).$$

Несложно проверить, что $t(1-t) \leqslant 1/4$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что $\varphi''(u) \leqslant 1/4$ для всех $u \geqslant 0$.

Доказательство

Используя разложение функции $\varphi(u)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $u = 0$ с остаточным членом в форме Лагранжа, находим:

$$\varphi(u) = \varphi(0) + u\varphi'(0) + \frac{u^2}{2}\,\varphi''(\tilde{u}) = \frac{u^2}{2}\,\varphi''(\tilde{u}) \leqslant \frac{u^2}{8} = \frac{\lambda^2(b-a)^2}{8},$$

где $\tilde{u} \in (0, u)$.
Заметив, что $\mathsf{E}e^{\lambda X} \leqslant e^{\varphi(u)}$, окончательно получим:

$$\mathsf{E}e^{\lambda X} \leqslant e^{\lambda^2(b-a)^2/8}.$$

$\square$

Экспоненциальные неравенства

Теорема 2.1 (неравенство Хёффдинга)

Пусть $\mathsf{P}(a_i \leqslant X_i \leqslant b_i) = 1$, $i \leqslant n$. *Тогда для всех* $x > 0$

$$\mathsf{P}(S_n - \mathsf{E}S_n \geqslant x) \leqslant \exp\left\{ -\frac{2x^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2} \right\}. \tag{2.1}$$

Доказательство

В силу независимости случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ из экспоненциального неравенства Чебышёва следует, что для любого $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(S_n - \mathsf{E}S_n \geqslant x) &\leqslant e^{-\lambda x}\mathsf{E}e^{\lambda(S_n - \mathsf{E}S_n)} = e^{-\lambda x}\mathsf{E}\prod_{i=1}^{n} e^{\lambda(X_i - \mathsf{E}X_i)} = \\ &= e^{-\lambda x}\prod_{i=1}^{n}\mathsf{E}e^{\lambda(X_i - \mathsf{E}X_i)}. \end{aligned}$$

Доказательство

Так как случайные величины $X_i - \mathsf{E}X_i$, $i = 1, \ldots, n$, имеют нулевые математические ожидания и ограничены:

$$\mathsf{P}(a_i - \mathsf{E}X_i \leqslant X_i - \mathsf{E}X_i \leqslant b_i - \mathsf{E}X_i) = 1,$$

то из леммы 2.1 получаем

$$\mathsf{E}e^{\lambda(X_i - \mathsf{E}X_i)} \leqslant e^{\lambda^2(b_i - a_i)^2/8}.$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}(S_n - \mathsf{E}S_n \geqslant x) \leqslant \exp\Big\{ -\lambda x + \frac{\lambda^2}{8} \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2 \Big\}.$$

Доказательство

Подставляя в это неравенство значение $\lambda = 4x / \sum\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2$, окончательно получаем:

$$\mathsf{P}(S_n - \mathsf{E} S_n \geqslant x) \leqslant \exp\left\{ - \frac{2x^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2} \right\}.$$

Отметим, что $\lambda = 4x / \sum\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2$ является точкой минимума функции

$$f(\lambda) = -\lambda x + \frac{\lambda^2}{8} \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2.$$

$\square$

Следствие 2.1

Пусть $\mathsf{P}(X_i = -1) = \mathsf{P}(X_i = 1) = 1/2$, $i \leqslant n$, $a_1, \ldots, a_n$ — *произвольные числа. Тогда для всех* $x > 0$

$$\mathsf{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \geqslant x\Big) \leqslant e^{-x^2/2B_n^2}, \tag{2.2}$$

где $B_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$.

Следствие 2.2 (**неравенство Чернова**)

Пусть $\mathsf{P}(X_i = -1) = \mathsf{P}(X_i = 1) = 1/2$, $i \leqslant n$. *Тогда для всех* $x > 0$

$$\mathsf{P}(|S_n| \geqslant x) \leqslant 2e^{-x^2/2n}. \tag{2.3}$$

Следствие 2.3

Пусть $\mathsf{P}(X_i = 0) = \mathsf{P}(X_i = 1) = 1/2$, $i \leqslant n$. *Тогда для всех* $x > 0$

$$\mathsf{P}(|S_n - n/2| \geqslant x) \leqslant 2e^{-2x^2/n}. \tag{2.4}$$

Теперь перейдём к рассмотрению более общего случая.

Теорема 2.2 (неравенство Петрова)

Пусть существуют положительные постоянные T и $g_1, \ldots, g_n$ такие, что

$$\mathsf{E} e^{tX_k} \leqslant e^{g_k t^2/2} \tag{2.5}$$

при $0 \leqslant t \leqslant T$. Тогда

$$\mathsf{P}(S_n \geqslant x) \leqslant \begin{cases} e^{-x^2/2G}, & 0 \leqslant x \leqslant GT, \\ e^{-xT/2}, & x \geqslant GT, \end{cases} \tag{2.6}$$

где $G = g_1 + \ldots + g_n$.

Доказательство

Из экспоненциального неравенства Чебышёва и условия (2.5) получаем:

$$\mathsf{P}(S_n \geqslant x) \leqslant \frac{\mathsf{E}e^{tS_n}}{e^{tx}} = e^{-tx} \prod_{k=1}^{n} \mathsf{E}e^{tX_k} \leqslant e^{-tx} e^{Gt^2/2} = \exp\left\{Gt^2/2 - tx\right\}$$

для любого $t > 0$.
Обозначим $f(t) = Gt^2/2 - tx$. Тогда

$$\mathsf{P}(S_n \geqslant x) \leqslant \inf_{0 \leqslant t \leqslant T} e^{f(t)}.$$

Для каждого фиксированного x минимизируем $f(t)$.

Экспоненциальные неравенства

Доказательство

Пусть $0 \leqslant x \leqslant GT$. Уравнение $f'(t) = 0$ имеет единственное решение $t = x/G$, являющееся точкой минимума функции $f(t)$. Это решение удовлетворяет условию $0 \leqslant t \leqslant T$. Следовательно,

$$\inf_{0\leqslant t\leqslant T} e^{f(t)} = e^{\inf\limits_{0\leqslant t\leqslant T} f(t)} = e^{f(x/G)} = e^{-x^2/2G}.$$

Пусть теперь $x \geqslant GT$. В этом случае $f'(t) = Gt - x \leqslant 0$ для всех $t \in [0, T]$, т. е. функция $f(t)$ не возрастает на $[0, T]$. Тогда

$$\inf_{0\leqslant t\leqslant T} f(t) = f(T) = \frac{GT^2}{2} - xT \leqslant \frac{xT^2}{2T} - xT = -\frac{xT}{2}.$$

$\square$

Замечание

Если случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ удовлетворяют условию (2.5) при $-T \leqslant t \leqslant 0$, то случайные величины $-X_1, \ldots, -X_n$ удовлетворяют условию (2.5) при $0 \leqslant t \leqslant T$. Поэтому верно неравенство (2.6) с заменой S_n на $-S_n$. Следовательно, если выполнено условие (2.5), то

$$\mathsf{P}(|S_n| \geqslant x) \leqslant \begin{cases} 2e^{-x^2/2G}, & 0 \leqslant x \leqslant GT, \\ 2e^{-xT/2}, & x \geqslant GT, \end{cases} \leqslant$$

$$\leqslant 2\exp\left\{-\frac{x^2}{2(G + x/T)}\right\}.$$

Выясним вероятностный смысл условий теоремы 2.2.

Лемма 2.2

Пусть X — случайная величина. Тогда следующие утверждения эквивалентны:
(i) *Существует $T > 0$ такое, что $\mathsf{E}e^{tX} < \infty$ при $|t| < T$;*
(ii) *Существует $a > 0$ такое, что $\mathsf{E}e^{a|X|} < \infty$;*
(iii) *Существуют $b > 0$ и $c > 0$ такие, что $\mathsf{P}(|X| > t) \leqslant be^{-ct}$ для всех $t \geqslant 0$.*
Если $\mathsf{E}X = 0$, то каждое из этих утверждений эквивалентно утверждению
(iv) *Существуют $g > 0$ и $T > 0$ такие, что $\mathsf{E}e^{tX} < e^{gt^2}$ при $|t| \leqslant T$.*

Доказательство

Из неравенства $e^{tX} \leqslant e^{|tX|}$ следует, что если выполнено (ii), то $\mathsf{E}e^{tX} < \infty$ при $|t| < a$, т. е. имеет место (i). Аналогично устанавливается, что из (i) следует (ii).
Если выполнено (ii), то

$$\mathsf{P}(|X| \geqslant t) \leqslant e^{-at}\mathsf{E}e^{a|X|}$$

для всех $t \geqslant 0$, так что (iii) тоже выполнено.
Покажем, что из (iii) следует (ii). Пусть $0 < a < c$. Тогда, как будет показано ниже в лемме 2.5

$$\mathsf{E}e^{a|X|} = 1 + a\int\limits_0^\infty e^{at}\mathsf{P}(|X| \geqslant t)\,dt \leqslant 1 + ab\int\limits_0^\infty e^{(a-c)t}\,dt < \infty.$$

Итак, равносильность утверждений (i), (ii) и (iii) установлена.

Доказательство

Пусть $\mathsf{E}X = 0$. Очевидно, что из (iv) следует (i). Если выполнено (i), то

$$\mathsf{E}e^{tX} = 1 + \frac{t^2\mathsf{E}X^2}{2} + o(t^2), \quad t \to 0.$$

Следовательно, для любой постоянной $g > \mathsf{E}X^2/2$ справедливо неравенство $\mathsf{E}e^{tX} \leqslant e^{gt^2}$ для всех достаточно малых t, т. е. имеет место (iv). $\square$

Теорема 2.3 (**неравенство Бернштейна**)

Пусть $\mathsf{E}X_k = 0$, $\sigma_k^2 = \mathsf{E}X_k^2 < \infty$, $B_n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k^2$ *и пусть существует такая положительная постоянная* H, *что*

$$\mathsf{E}|X_k|^m \leqslant \frac{m!}{2}\,\sigma_k^2 H^{m-2} \text{ для всех целых } m \geqslant 2.$$

Тогда

$$\mathsf{P}(S_n \geqslant x) \leqslant \begin{cases} e^{-x^2/4B_n^2}, & 0 \leqslant x \leqslant B_n^2/H, \\ e^{-x/4H}, & x > B_n^2/H. \end{cases}$$

Доказательство

Рассмотрим формальное равенство

$$\mathsf{E}e^{tX_k} = \mathsf{E}\Big(1 + tX_k + \frac{t^2}{2!}X_k^2 + \sum_{m\geqslant 3}\frac{t^m}{m!}X_k^m\Big).$$

Из условий теоремы получаем:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}e^{tX_k} &= 1 + \frac{\sigma_k^2 t^2}{2} + t^2\sum_{m\geqslant 3}\frac{t^{m-2}}{m!}\mathsf{E}X_k^m \leqslant \\
&\leqslant 1 + \frac{\sigma_k^2 t^2}{2} + \frac{t^2}{2}\sum_{m\geqslant 3}\sigma_k^2 H^{m-2}t^{m-2} = \\
&= 1 + \frac{\sigma_k^2 t^2}{2} + \frac{\sigma_k^2 t^2}{2}\sum_{m\geqslant 3}(Ht)^{m-2}.
\end{aligned}$$

Доказательство

Если $|tH| \leqslant 1/2$, то

$$\mathsf{E}e^{tX_k} \leqslant 1 + \frac{\sigma_k^2 t^2}{2}\left(1 + \frac{Ht}{1 - Ht}\right) = 1 + \frac{\sigma_k^2 t^2}{2}\frac{1}{1 - Ht} \leqslant 1 + \sigma_k^2 t^2 \leqslant e^{\sigma_k^2 t^2}.$$

Таким образом, выполнены условия теоремы 2.2 при $|t| \leqslant 1/(2H)$ и $g_k = 2\sigma_k^2$. Следовательно, $G = 2B_n^2$. Применяя теорему 2.2 при $T = 1/(2H)$, получим требуемое соотношение. □

Отметим, что теорема 2.2 представляет собой не только более общий, но и более точный результат по сравнению с теоремой 2.3.

В теоремах 2.2 и 2.3 были получены экспоненциальные оценки для распределений сумм случайных величин, имеющих конечные моменты всех порядков. Ниже будут получены аналогичные оценки для случайных величин, относительно которых не предполагается существование конечных моментов того или иного порядка.

Лемма 2.3

Пусть $\mathsf{P}(X_j \leqslant y) = 1$ *для некоторого* $y > 0$ *и всех* $j \leqslant n$. *Тогда для всех* $\lambda > 0$

$$\mathsf{E}e^{\lambda S_n} \leqslant \exp\left\{\lambda \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}X_j + \frac{e^{\lambda y} - 1 - \lambda y}{y^2} \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}X_j^2\right\}.$$

Доказательство

Пусть f — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Если $f(0) = f'(0) = 0$, то

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^1 x f'(tx)\,dt, \quad f'(tx) = \int_0^1 tx f''(ytx)\,dy,$$

и, следовательно,

$$f(x) = x^2 \int_0^1 \int_0^1 t f''(ytx)\,dy\,dt. \tag{2.7}$$

Положим $\psi(x) = (e^x - 1 - x)/x^2$ и $f(x) = e^x - 1 - x$. Тогда $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(x) = e^x$, и из (2.7) получаем:

Экспоненциальные неравенства

Доказательство

$$\psi(x) = \frac{f(x)}{x^2} = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 t e^{ytx}\, dy\, dt.$$

Отсюда следует, что $\psi(x)$ — неубывающая функция.
Тогда

$$\begin{aligned} e^{\lambda X_j} &= 1 + \lambda X_j + \lambda^2 X_j^2 \frac{e^{\lambda X_j} - 1 - \lambda X_j}{\lambda^2 X_j^2} = 1 + \lambda X_j + \lambda^2 X_j^2 \psi(\lambda X_j) \leqslant \\ &\leqslant 1 + \lambda X_j + \lambda^2 X_j^2 \psi(\lambda y). \end{aligned}$$

Доказательство

Следовательно,

$$\mathsf{E}e^{\lambda X_j} \leqslant \exp\left\{\lambda \mathsf{E}X_j + \lambda^2 \psi(\lambda y)\mathsf{E}X_j^2\right\}.$$

Отсюда, в силу независимости случайных величин $X_1, \ldots, X_n$,

$$\mathsf{E}e^{\lambda S_n} = \prod_{j=1}^{n} \mathsf{E}e^{\lambda X_j} \leqslant \exp\left\{\lambda \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}X_j + \frac{e^{\lambda y} - 1 - \lambda y}{y^2} \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}X_j^2\right\}.$$

□

Лемма 2.4

Пусть $\mathsf{P}(X_j \leqslant y) = 1$ *для некоторого* $y > 0$ *и* $\mathsf{E}X_j \leqslant 0$, $j \leqslant n$. *Тогда для всех* $x > 0$

$$\mathsf{P}(S_n \geqslant x) \leqslant \exp\left\{\frac{x}{y} - \frac{B_n^2 + xy}{y^2}\ln(1 + \frac{xy}{B_n^2})\right\}, \tag{2.8}$$

где $B_n^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathsf{E}X_j^2$.

Доказательство

Так как $\mathsf{E}X_j \leqslant 0$, то из леммы 2.3 имеем

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(S_n \geqslant x) &\leqslant e^{-\lambda x}\mathsf{E}e^{\lambda S_n} \leqslant \\
&\leqslant \exp\left\{-\lambda x + \lambda \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}X_j + \frac{e^{\lambda y} - 1 - \lambda y}{y^2} \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}X_j^2\right\} \leqslant \\
&\leqslant \exp\left\{-\lambda x + \frac{e^{\lambda y} - 1 - \lambda y}{y^2} B_n^2\right\}.
\end{aligned}$$

Экспоненциальные неравенства

Доказательство

Обозначим

$$h(\lambda) = -\lambda x + (e^{\lambda y} - 1 - \lambda y)y^{-2}B_n^2.$$

Тогда, в силу произвольности $\lambda > 0$,

$$\mathsf{P}(S_n \geqslant x) \leqslant \inf_{\lambda>0} e^{h(\lambda)} = \exp\{\inf_{\lambda>0} h(\lambda)\}.$$

Нетрудно проверить, что $\lambda_0 = y^{-1}\ln(1 + xy/B_n^2)$ — точка минимума функции $h(\lambda)$ и

$$h(\lambda_0) = \frac{x}{y} - \frac{B_n^2 + xy}{y^2}\ln(1 + \frac{xy}{B_n^2}).$$

$\square$

Теорема 2.4

Пусть выполнены условия леммы 2.4. Тогда для всех $x > 0$

$$\mathsf{P}(S_n \geqslant x) \leqslant \exp\left\{-\frac{x^2}{2(B_n^2 + xy)}\right\}. \tag{2.9}$$

Доказательство

Обозначим через $p(x,y)$ показатель экспоненты в правой части неравенства (2.8). Тогда из (2.8) и очевидного неравенства $t^{-1}\ln(1-t) \leqslant -1 - t/2$, $0 < t < 1$, получаем:

$$\begin{aligned} p(x,y) &= \frac{x}{y} + \frac{B_n^2 + xy}{y^2} \ln\left(1 - \frac{xy}{B_n^2 + xy}\right) \leqslant \\ &\leqslant \frac{x}{y} + \frac{x}{y}\left(-1 - \frac{xy}{2B_n^2 + 2xy}\right) = -\frac{x^2}{2B_n^2 + 2xy}. \end{aligned}$$

$\square$

Следствие 2.4 (неравенство Бернштейна)

Пусть $\mathsf{P}(|X_j| \leqslant y) = 1$ *для некоторого* $y > 0$ *и* $\mathsf{E}X_j = 0$, $j \leqslant n$. *Тогда для всех* $x > 0$

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(|S_n| \geqslant x) &\leqslant 2\exp\left\{\frac{x}{y} - \frac{B_n^2 + xy}{y^2}\ln\left(1 + \frac{xy}{B_n^2}\right)\right\} \leqslant \\ &\leqslant 2\exp\left\{-\frac{x^2}{2(B_n^2 + xy)}\right\}. \end{aligned}$$

Теорема 2.5 (неравенство Нагаева — Фука)

Пусть $y_1, \ldots, y_n$ *— произвольные положительные числа,* $y = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} y_j$, $F_j(x) = \mathsf{P}(X_j < x)$, $\mu = \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{y_j} x dF_j(x)$, $B^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{y_j} x^2 dF_j(x)$. *Тогда для всех* $x > 0$

$$\mathsf{P}(S_n \geqslant x) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}(X_j \geqslant y_j) + \exp\left\{ \frac{x}{y} - \left(\frac{x - \mu}{y} + \frac{B^2}{y^2} \right) \ln\left(1 + \frac{xy}{B^2} \right) \right\}. \tag{2.10}$$

Доказательство

Обозначим $Z_j = X_j I(X_j < y_j)$, $T_n = \sum\limits_{j=1}^{n} Z_j$. Отметим, что $\sum\limits_{j=1}^{n} \mathsf{E} Z_j = \mu$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} \mathsf{E} Z_j^2 = B^2$. Заметим также, что событие $\{S_n \geqslant x\}$ влечет хотя бы одно из событий $\{T_n \geqslant x\}$ или $\{S_n \neq T_n\}$. Следовательно, из леммы 2.3 для всех $\lambda > 0$ получаем:

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(S_n \geqslant x) \quad &\leqslant \quad \mathsf{P}(S_n \neq T_n) + \mathsf{P}(T_n \geqslant x) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}(X_j \geqslant y_j) + e^{-\lambda x} \mathsf{E} e^{\lambda T_n} \leqslant \\
&\leqslant \quad \sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}(X_j \geqslant y_j) + \exp\left\{ -\lambda x + \lambda\mu + \frac{e^{\lambda y} - 1 - \lambda y}{y^2} B^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Оценим второе слагаемое в правой части последнего неравенства.

Доказательство

Положим

$$\lambda = \frac{1}{y} \ln\left(1 + \frac{xy}{B^2}\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(T_n \geqslant x) &\leqslant \exp\left\{ -\frac{x-\mu}{y} \ln\left(1 + \frac{xy}{B^2}\right) + \frac{\frac{xy}{B^2} - \ln(1 + \frac{xy}{B^2})}{y^2} B^2 \right\} = \\ &= \exp\left\{ \frac{x}{y} - \left(\frac{x-\mu}{y} + \frac{B^2}{y^2} \right) \ln\left(1 + \frac{xy}{B^2}\right) \right\}. \end{aligned}$$

□

Следствие 2.5

Пусть в условиях теоремы 2.5 $\mathsf{E}X_j = 0$, $j \leqslant n$. *Тогда для всех* $x > 0$

$$\mathsf{P}(|S_n| \geqslant x) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}(|X_j| \geqslant y_j) + 2\exp\left\{\frac{x}{y} - \frac{x}{y}\ln\left(1 + \frac{xy}{B_n^2}\right)\right\},$$

где $B_n^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathsf{E}X_j^2$.

Следствие 2.6

Пусть $y_1, \ldots, y_n$ *— произвольные положительные числа,* $y = \max\limits_{j \leqslant n} y_j$, $\mathsf{E} X_j = 0$, $B_n^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathsf{E} X_j^2$. *Тогда для всех* $x > 0$

$$\mathsf{P}(|S_n| \geqslant x) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}(|X_j| \geqslant y_j) + 2\exp\left\{-\frac{x^2}{2(B_n^2 + xy)}\right\}. \qquad (2.11)$$

Теорема 2.6 (неравенство Нагаева — Фука)

Пусть $y_1, \ldots, y_n$ *— произвольные положительные числа,* $y = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} y_j$*,*

$F_j(x) = \mathsf{P}(X_j < x)$*,* $D = \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{-y_j}^{y_j} |x|\, dF_j(x)$*. Тогда для всех* $x > 0$

$$\mathsf{P}(|S_n| \geqslant x) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}(|X_j| \geqslant y_j) + \exp\left\{ \frac{x}{y} - \frac{x}{y} \ln(1 + x/D) \right\}. \qquad (2.12)$$

Доказательство

Обозначим $Z_j = X_j I(|X_j| < y_j)$, $T_n = \sum\limits_{j=1}^{n} Z_j$. Тогда $\sum\limits_{j=1}^{n} \mathsf{E}|Z_j| = D$ и для всех $\lambda > 0$

$$\mathsf{P}(|S_n| \geqslant x) \leqslant \mathsf{P}(S_n \neq T_n) + \mathsf{P}(|T_n| \geqslant x) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}(|X_j| \geqslant y_j) + e^{-\lambda x} \mathsf{E}\, e^{\lambda |T_n|}. \tag{2.13}$$

Доказательство

Заметим, что функция $(e^{\lambda|x|}-1)/|x|$ достигает своего максимального значения в области $|x| \leqslant y$ при $|x| = y$. Тогда

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}e^{\lambda|T_n|} &\leqslant \prod_{j=1}^{n} \mathsf{E}e^{\lambda|Z_j|} = \prod_{j=1}^{n} \mathsf{E}\left(1 + \frac{e^{\lambda|Z_j|}-1}{|Z_j|}\,|Z_j|\right) \leqslant \\
&\leqslant \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{e^{\lambda y_j}-1}{y_j}\,\mathsf{E}|Z_j|\right) \leqslant \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{e^{\lambda y}-1}{y}\,\mathsf{E}|Z_j|\right) \leqslant \\
&\leqslant \exp\left\{\frac{e^{\lambda y}-1}{y}\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}|Z_j|\right\} = \exp\left\{\frac{e^{\lambda y}-1}{y}D\right\}. \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

Доказательство

Следовательно, из (2.13) и (2.14) при $\lambda = \ln(1 + x/D)/y$ получаем:

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(|S_n| \geqslant x) &\leqslant \sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}(|X_j| \geqslant y_j) + \exp\left\{-\lambda x + \frac{e^{\lambda y} - 1}{y} D\right\} = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}(|X_j| \geqslant y_j) + \exp\left\{\frac{x}{y} - \frac{x}{y} \ln(1 + x/D)\right\}. \end{aligned}$$

□